数理解析研究所講究録
779巻 1992年 108-122

弾性方程式の解の局所エネルギー減衰について

高知大学　理学部　川下美潮　(Mishio Kawashita)

§0. 序

Ωは$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$内の外部領域で，コンパクトかつ滑らかな境界Γを持つとする。Neumann条件を課した等方性弾性方程式の混合問題

$$
(\mathrm{N.P}) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - A(\partial_x))u(t,x) = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}\times\Omega \\ N(\partial_x)u(t,x) = 0 & \text{on} \quad \mathbb{R}\times\Gamma \\ u(0,x) = f_1(x),\ \partial_t u(0,x) = f_2(x) & \text{on} \quad \Omega \end{cases}
$$

を考える。上で

$$A(\partial_x)u = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j}u) \qquad u = {}^t(u_1, \cdots, u_n)$$

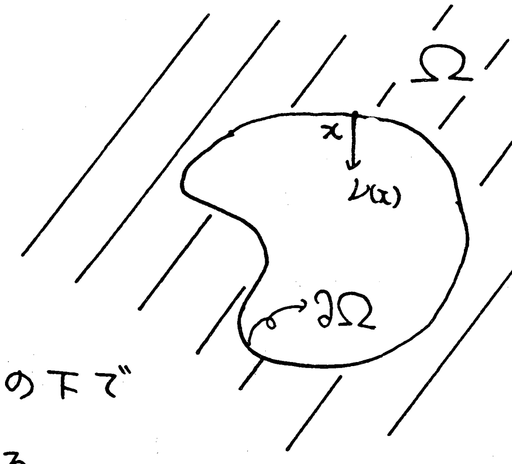
$$a_{ij} = \left(a_{ipjq} \;\middle|\; \begin{smallmatrix} p\downarrow 1,\cdots,n \\ q\to 1,\cdots,n \end{smallmatrix}\right)$$

$$a_{ipjq} = \lambda\delta_{ip}\delta_{jq} + \mu(\delta_{ij}\delta_{pq} + \delta_{iq}\delta_{jp})$$

であり、境界作用素$N(\partial_x)$は$A(\partial_x)$の余法線微分、すなわち

$$N(\partial_x)u = \sum_{i,j=1}^n \nu_i(x)a_{ij}\partial_{x_j}u|_\Gamma$$

である。ただし，$\nu(x) = {}^t(\nu_1(x), \cdots, \nu_n(x))$ は Ω の $x\in\Gamma$での単位



外向き法線ベクトルである。

以下、Laméの定数 λ, μ は (t,x)によらない定数で

$$\lambda+\frac{2}{n}\mu>0, \quad \mu>0$$

を満足すると仮定する。この仮定の下で岩下、柴田両氏[6]は(N.P)に対するレゾルベントの解析接続に関する考察を行ない、柴田、曽我両氏[6]は(N.P)に対するLax-Phillips流の散乱理論([9]を参照)を展開した。

有界領域 $D\subset\mathbb{R}^n$ に対して、(N.P)の解 $u(t,x)$ の $\Omega\cap D$ における局所エネルギー $E(u,D,t)$ を

$$E(u,D,t):=\frac{1}{2}\int_{\Omega\cap D}\left\{\sum_{i,p,j,q=1}^{n} a_{ipjq}\partial_{x_j}u_q(t,x)\overline{\partial_{x_i}u_p(t,x)}+|\partial_t u(t,x)|^2\right\}dx$$

で定める。柴田、曽我両氏[14]は、散乱理論の構築の基礎となる(N.P)のエネルギー有限の解 $u(t,x)$ の局所エネルギーは減衰するという事実、すなわち

『 Dが有界 $\Rightarrow \lim_{t\to\infty}E(u,D,t)=0$ 』

が成立することを示している。そこで、上のエネルギー減衰に一様性があるのかどうかについて確かめることが興味の対象になる。以下この問題について考える。

まず、エネルギー減衰の一様性について述べる。

定義 0.1（一様局所エネルギー減衰）

$^{\forall}D, D_0 \subset \mathbb{R}^n$ ： 有界領域 に対して

$^{\exists}p \in C([0,\infty))$ s.t. $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$ かつ

(0.1) $E(u, D, t) \leq p(t) E(u, \Omega, 0)$

（$^{\forall}t \geq 0$, $^{\forall}u$: (N.P) の解で $f_1, f_2 \in C_0^{\infty}(\overline{\Omega} \cap D)$ となるもの）

が成り立つとき、(N.P)は一様局所エネルギー減衰を起こすという。

波動方程式のDirichlet問題、Neumann問題、又は、等方性弾性方程式のDirichlet問題の場合、物体$\mathbb{R}^n \setminus \Omega$が凸ならば、これらの混合問題は一様局所エネルギー減衰を起こし、さらにnが奇数のときは $p(t) = Ce^{-\alpha t}$ ($^{\exists}\alpha > 0$)、nが偶数のときは $p(t) = C(1+t)^{-(n-1)}$ の型の関数に対して(0.1)の評価が成立することが多くの人によって確認されている。（例えば、Vainberg [16], Morawetz [10,11] Ralston [13], Kapitonov [7], Iwashita and Shibata [6] を見よ。）

一方(N.P)に対しては主に境界上を伝わると考えられるRayleigh 波と呼ばれている波が存在すると言われている。特に、半空間$\mathbb{R}^3_+$ の場合にはRayleigh波を直接書き下し、さらに $t\to\infty$ のときにそのエネルギーは $\partial\mathbb{R}^3_+$ に集中することが示されている（Achenbach [1] 又は Guillot [3] 参照）。また、Taylor [15] は特異性伝播の意味におけるRayleigh波の存在に関する考

察を行なっている。それ故(N.P)の解の局所エネルギーが一様に減衰するとは考え難い。実際、池畠、中村両氏[5]は $n=3$ で、Γ が単位球面の場合に以下に述べる様なエネルギー減衰評価は成り立たないことを示している。

「 $^\forall D, D_0 \subset \mathbb{R}^3$: 有界領域, $^\forall m \geq 1$ 整数 に対して

$^\exists \alpha > 0$, $^\exists C > 0$ s.t.

$$E(u, D, t) \leq C e^{-\alpha t} \sum_{|\beta| \leq m} \int_\Omega |(\partial_t^{\beta_0} \partial_x^{\beta'} u)(0, x)|^2 dx \qquad (\beta = \beta_0, \beta')$$

($^\forall t \geq 0$, $^\forall u$: (N.P) の smooth な解で $\mathrm{supp}\, f_1, f_2 \subset \overline{\Omega} \cap D_0$ となるもの)

が成り立つ。 」

池畠、中村両氏[5]は、(N.P) の解で上の評価を満足しないものを特殊関数を用いて構成することにより上記の結論を導びいている。しかしながら、物体が球であることを本質的に用いているので[5]における方法をそのまま一般の物体の場合に用いることは難しい。一般の物体の場合は[5]の結果よりは弱いのであるが次のことはわかる。

<u>定理 0.2</u>　(N.P)は以下に述べる様な性質は満足しない。

「 $^\forall D, D_0 \subset \mathbb{R}^n$: 有界領域 に対して

$^\exists p \in \mathcal{B}([0, \infty))$ s.t.

$$\int_0^\infty p(t)^{\frac{1}{2}} dt < +\infty, \quad \int_0^\infty \int_s^\infty p(t)^{\frac{1}{2}} dt\, ds < +\infty$$

かつ

$$E(u, D, t) \leq P(t)\, E(u, \Omega, 0)$$

($^\forall t \geq 0$, $^\forall u$: (N.P)の解で $f_1, f_2 \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \cap D_0)$ となるもの。)

が成り立つ。 ⌟

次に n が特に奇数の場合を考える。このときは、$\partial_t^2 - A(\partial_x)$ に対する Cauchy 問題に関しては Heygens の原理が成り立つ。また、(N.P) の解の全エネルギーは保存されるので、Morawetz の論法([11] 参照)が n が奇数のときの (N.P) にも適用できる。よって、(N.P) が一様局所エネルギー減衰を起こせば、減衰度 $P(t)$ は、$P(t) = Ce^{-\alpha t}$ ($^\exists \alpha > 0$) とできる。この事実と定理 0.2 より次を得る。

<u>系 0.3.</u> n は奇数とする。このとき (N.P) は一様局所エネルギー減衰 を起こさない。

<u>注意</u> 定理 0.2 の主張は、n が偶数のときには無意味な様に思えるかも知れないがその限りではない。先に、波動方程式の Dirichlet 問題、Neumann 問題、等方性弾性方程式の Dirichlet 問題では、物体 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ が凸であれば一様局所エネルギー減衰を起こし、さらに減衰度も特定できることを述べた。その結果を見れば明らかに定理 0.2 の『…』も満足している

ことがわかる。故にこれらの問題では、物体が凸であれば、定理0.2 の『…』で述べた程度の一様減衰を起こしている。一方、定理0.2 は物体の形状の如何を問わず (N.D) は『…』の様な一様減衰を起こさないことを主張する。この様に (N.D) の解と上の三つの混合問題の解とは互いに異なる性質をもつことが定理0.2 を通じて理解することができるのである。

§1. 証明の概略

大まかに言えば，背理法を用いて定理0.2 を示すのであるが、この節ではその手順の概略について述べる。

まず始めに、証明のための重要な役割をはたす Neumann 作用素を導入する。

$$C^\infty_\pm(\mathbb{R}\times\Gamma) := \{ f\in C^\infty(\mathbb{R}\times\Gamma) \mid \exists t_1\in\mathbb{R} \text{ s.t. } f(t,x)=0 \text{ for } \pm t<t_1 \}$$

と定め、$f\in C^\infty_\pm(\mathbb{R}\times\Gamma)$ に対して境界値問題

$$\begin{cases} (A(\partial_x)-\partial_t^2)v^\pm(t,x)=0 & \text{in } \mathbb{R}\times\Omega \\ v^\pm(t,x)=f(t,x) & \text{on } \mathbb{R}\times\Gamma \\ v^+ : \text{outgoing} \quad (v^- : \text{incoming}) & \end{cases}$$

の一意解 $v^\pm\in C^\infty_\pm(\mathbb{R}\times\Gamma)$ を考える。ただし $v^\pm$ が『$\exists t_1\in\mathbb{R}$ s.t. $v^\pm(t,x)=0$ for $\pm t<t_1$ (複号同順)』を満足するときに v^+ は outgoing (又は v^- は incoming) であると言う。この $v^\pm(t,x)$ を用いて Neumann 作用素 $T^\pm : C^\infty_\pm(\mathbb{R}\times\Gamma)\to C^\infty_\pm(\mathbb{R}\times\Gamma)$ を

$$(T^{\pm}f)(t,x) := \left(N(\partial_x)v^{\pm}(t,x)\right)\big|_{\mathbb{R}\times\Gamma}$$

で定める。

<u>オ一段階</u>　証明のオ一段階は背理法の仮定をNeumann作用素の性質に反影させること、すなわち、次の命題を示すことである。

<u>命題 1.1</u>　定理0.2が成り立たないと仮定すれば、

(1.1) $$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}\times\Gamma)} \leq C\|T^{\pm}f\|_{L^2(\mathbb{R}\times\Gamma)}$$
$$(\forall f \in C^{\infty}_{\pm}(\mathbb{R}\times\Gamma),\ T^{\pm}f \in C^{\infty}_{0}(\mathbb{R}\times\Gamma))$$

が成り立つ様な λ, μ と Γ 以外のものには依存しない定数 $C>0$ が存在する。

<u>注意</u>　命題1.1には $f \in C^{\infty}_{\pm}(\mathbb{R}\times\Gamma)$ で $T^{\pm}f \in C^{\infty}_{0}(\mathbb{R}\times\Gamma)$ ならば $f \in L^2(\mathbb{R}\times\Gamma)$ となるということも含まれている。

<u>オ二段階</u>　まず、定理0.2が成立するか否かにかかわりなく次のことが成り立つことをまず確認する。

<u>命題 1.2.</u>　Elliptic region においては Neumann作用素は、一階のclassicalな実主要型擬微分作用素である。

注意　Taylor [15] は $n=2$ のときに命題 1.2 を示している。 $n\geq 3$ のときの命題 1.2 の証明は熊ノ郷先生 [8] の才六章の方法に沿って行なうと良い。

命題 1.2 より T^+ の漸近零解（すなわち $T^+g=O(k^{-1})$ ($k\to\infty$ のとき) を満足するもの）で、その主要項が零でないものを構成できることがわかる。この段の目標はこの漸近零解を得ることにある。

才三段階　ところが、命題 1.1 の評価を用いると才二段階で構成した漸近零解の主要項は実は恒等的に零でなければならないことが示せる。よって矛盾である。

以上の手順で定理 0.2 を示す。大雑把に言えば、命題 1.1 は Neumann 作用素は elliptic の様な性質をもつことを主張し、命題 1.2 は Neumann 作用素は hyperbolic の様な性質をもつことを示唆しているわけだから、命題 1.1 と命題 1.2 は互いに相容れないものであることは受け入れ易いと思う。それ故、才二段階および才三段階の手順の説明は省略し、以下節を改めて才一段階について詳しく述べることにする。

§ 2. 命題1.1の証明

以下、T^+ の方に限り命題1.1の証明を与える。T^- の方も同様に示せることを注意しておく。まず、次の方程式

$$(2.1)\quad \begin{cases} (A(\partial_x)-\partial_t^2)w(t,x)=0 & \text{in } \mathbb{R}\times\Omega \\ N(\partial_x)w(t,x)=f(t,x) & \text{on } \mathbb{R}\times\Gamma \\ w : \text{outgoing} \end{cases}$$

の $\Omega_a := \{x\in\Omega \mid |x|<a\}$ での H^1- norm の評価を求めることから始める。

補題2.1. 命題1.1と同じ仮定の下で次が成り立つ。

$^\forall a>0$, $\Gamma\subset\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|<a\}$, $^\forall T>0$ に対して

$^\exists C>0$ s.t.

$$(2.2)_\ell\quad \int_0^\infty \|w(t,\cdot)\|^\ell_{H^1(\Omega_a)}dt \le C\,E(w,\Omega,0)^{\frac{\ell}{2}} \quad (\ell=1,2)$$

($^\forall w$: (2.1)の解で $f\in C_0^\infty((-T,0)\times\Gamma)$ であるもの)

が成り立つ。

証明 補題2.1を示すためには、

$$(2.3)\quad \|w(t,\cdot)\|^2_{H^1(\Omega_a)} \le {}^\exists C\left\{P(t)+\left(\int_t^\infty P(s)^{\frac{1}{2}}ds\right)^2\right\}E(w,\Omega,0) \quad (^\forall t>0)$$

を示せば良い。ただし $P(t)\in\mathcal{B}([0,\infty))$ は定理0.2の中の『…』

における $D=\Omega_a$, $D_0=\Omega_b$ ($b:=\max_{x\in\Gamma}|x|+T\sqrt{\lambda+2\mu}$) に対する $P(t)$ である。しかし Korn の第二不等式 (Fichera [2], Nitsche [12] 参照) より

$$\|w(t,\cdot)\|^2_{H^1(\Omega_a)} \le {}^{\exists}C\{E(w,\Omega_a,t)+\|w(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_a)}\} \quad ({}^{\forall}t\in\mathbb{R})$$

が成り立つので、(2.3) を得るためには結局

$$(2.4)\quad \|w(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_a)} \le \left(\int_t^\infty P(s)^{\frac{1}{2}}ds\right)^2 E(w,\Omega,0) \qquad ({}^{\forall}t\ge 0)$$

を示せば良い。$\varepsilon>0$ をとる。これに対して

$$\left|\frac{d}{dt}\sqrt{\|w^+(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_a)}+\varepsilon}\,\right| \le \|\partial_t w(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_a)}$$

が成り立つので、(2.1) の解の伝播速度は $\sqrt{\lambda+2\mu}$ 以下であることに注意して定理 0.2 の中の『…』が成立すること (これが仮定であった) を用いると次を得る。

$$\left|\frac{d}{dt}\sqrt{\|w(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_a)}+\varepsilon}\,\right| \le P(t)^{\frac{1}{2}}E(w,\Omega,0)^{\frac{1}{2}} \quad ({}^{\forall}t\ge 0)$$

そこで、$0\le s<s'$ をとり s から s' まで上の不等式を積分し $\varepsilon\downarrow 0$ とし、さらに柴田、曽我 [14] の局所エネルギー減衰の結果から従う事実

$$\lim_{t\to\infty}\|w(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_a)}=0$$

に注意すれば (2.4) を得る。 ▨

上の準備の下で命題1.1を示す。Neumann作用素の定義に注意すれば、$f \in C_+^\infty(\mathbb{R}\times\Gamma)$に対して $((T^+)^{-1}f)(t,x) = w(t,x)|_{\mathbb{R}\times\Gamma}$ と表わせることがわかる。ただし $w(t,x)$ は境界data fに対する(2.1)の解である。故に(1.1)と次の不等式とは同値である。

$$\| w|_{\mathbb{R}\times\Gamma} \|_{L^2(\mathbb{R}\times\Gamma)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}\times\Gamma)} \quad ({}^\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\Gamma))$$

補題2.1より $w|_{\mathbb{R}\times\Gamma} \in L^2(\mathbb{R}\times\Gamma)$ だからPersevalの公式に注意すれば上の評価を得るには次の不等式を示せば良い。

$$\| u(\cdot\,;k)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|g\|_{L^2(\Gamma)} \quad ({}^\forall k \in \mathbb{R},\ {}^\forall g \in C^\infty(\Gamma))$$

ただし $u(x;k)$ は reduced wave equation

$$(2.5)\quad \begin{cases} (A(\partial_x)+k^2)u(x;k) = 0 & \text{in } \Omega \\ N(\partial_x)u(x;k) = g(x) & \text{on } \Gamma \\ u(\cdot\,;k) : \text{outgoing} & \end{cases}$$

(u: outgoing とは $\mathrm{Im}\,k<0$ に L^2-解として解析接続できることを指す。)

の解である。ここで $g \longmapsto u(\cdot\,;k)$ が $B(L^2(\Gamma), L^2(\Gamma))$-値関数として $k\in\mathbb{R}$ で局所有界であることに注意すれば結局

$$(2.6)\quad \| u(\cdot\,;k)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|g\|_{L^2(\Gamma)} \quad ({}^\forall k \in \mathbb{R},\ |k|\geq 1,\ {}^\forall g \in C^\infty(\Gamma))$$

を示せば充分であることがわかる。

<u>補題2.2.</u>　命題1.1と同じ仮定の下で次が成り立つ。

$\exists C = C(\Gamma, \chi, \mu) > 0$ s.t.

$$|k||\hat{\chi}(k)|^2\|u(\cdot\,;k)\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

$$\leq C\|\chi\|_{L^2(\mathbb{R})}\{\|\partial_t\chi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\chi\|_{L^2(\mathbb{R})}\}\|g\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

$$(\forall k \in \mathbb{R}, |k| \geq 1, \ \forall\chi \in C_0^\infty((-2,0)), \ \forall g \in C^\infty(\Gamma))$$

まず補題2.2を認めて(2.6)が正しいことを示す。$\chi_0 \in C_0^\infty((-2,0))$ で $\int_{-\infty}^{\infty}\chi_0(t)dt = 1$ となるものを一つ選ぶ。$|k_0| \geq 1$ となる任意の $k_0 \in \mathbb{R}$ に対して $\chi(t) := e^{ik_0t}\chi_0(t) \in C_0^\infty((-2,0))$ と定める。この χ と $k = k_0$ に対して補題2.2を用い、$\hat{\chi}(k_0) = 1$, $\|\chi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\chi_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$, $\|\partial_t\chi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\chi_0\|_{H^1(\mathbb{R})}(1+|k_0|)$ と $|k_0| \geq 1$ に注意すれば

$$\|u(\cdot\,;k_0)\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq 4C\|\chi_0\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\chi_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\|g\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

すなわち(2.6)を得る。(注意．(2.6)を補題2.2.に帰着するという発想は、井川先生[4]による。)

以下補題2.2を示す。$\chi \in C_0^\infty((-2,0))$, $g \in C^\infty(\Gamma)$ とし関数 $f(t,x) = \chi(t)g(x)$ が境界dataである様な(2.1)の解を $w(t,x)$ とする。また $\partial\Omega \subset B_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < a\}$ となる様な $a > 0$ を一つ選び固定する。$\hat{w}(x;k) = \hat{\chi}(k)u(x;k)$ （$\hat{w}(x;k) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikt}w(t,x)dt$）とRobin型の問題を解くときによく用いられている評価

$$\|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \le {}^\exists C\left\{ \varepsilon \|\nabla_x v\|^2_{L^2(\Omega_a)} + \frac{1}{\varepsilon}\|v\|^2_{L^2(\Omega_a)} \right\}$$

$$\left({}^\forall v \in C^\infty(\overline{\Omega_a}) \quad , \ 0 < {}^\forall \varepsilon \le 1 \right)$$

に注意すれば次を得る。

(2.7) $$|k||\hat{\chi}(k)|^2 \|u(\cdot\,;k)\|^2_{L^2(\Gamma)} = |k|\cdot\|\hat{w}(\cdot\,;k)\|^2_{L^2(\Gamma)}$$
$$\le C\left\{ \|\nabla_x \hat{w}(\cdot\,;k)\|^2_{L^2(\Omega_a)} + |k|^2 \|\hat{w}(\cdot\,;k)\|^2_{L^2(\Omega_a)} \right\} \quad ({}^\forall |k| \ge 1)$$

ここで(2.7)の左辺をMinkowski の不等式を用い例えば才一項に関しては

$$\|\nabla_x \hat{w}(\cdot\,;k)\|^2_{L^2(\Omega_a)} = \int_{\Omega_a} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} \nabla_x w(t,x)\,dt \right|^2 dx \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\nabla_x w(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_a)} dt \right)^2$$

と評価した後に積分区間を$(0,\infty)$と$(-\infty,0)$に分け $(2.2)_1$ と $\mathrm{supp}\, w \subset (-2,\infty)\times\overline{\Omega}$ に注意すれば

(2.7)の左辺 $\le {}^\exists C\cdot I$ (ただし, $I := \int_{-\infty}^{0} E(w,\Omega,t)\,dt + E(w,\Omega,0)$)

と評価できる。故に補題2.2 を得るには

(2.8) $$I \le {}^\exists C\|\chi\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\{ \|\partial_t \chi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\chi\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\} \|g\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

を示せば良いことがわかる。

部分積分を用いれば

$$E(w,\Omega,0) = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Gamma} \chi(s) g(x) \overline{\partial_t w(s,x)}\, dS_x ds$$

$$\int_{-\infty}^{0} E(w,\Omega,t)dt = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Gamma} (-s\chi(s)) g(x) \overline{\partial_t w(s,x)}\, dS_x ds$$

であることがわかるので、Perseval の公式と $\mathrm{supp}\,\chi\subset(-2,0)$ に注意すれば

$$I \leq {}^{\exists}C\left[\|\chi\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\{\|\partial_t\chi\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|\chi\|_{L^2(\mathbb{R})}\right\}\right]^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L^2(\Gamma)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|k|\,\|\hat{w}(\cdot\,;k)\|^2_{L^2(\Gamma)}dk\right)^{\frac{1}{2}}$$

を得る。さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty}|k|\,\|\hat{w}(\cdot\,;k)\|^2_{L^2(\Gamma)}dk = \int_{-1}^{1}|k|\,\|\hat{w}(\cdot\,;k)\|^2_{L^2(\Gamma)}dk + \int_{|k|\geq 1}|k|\,\|\hat{w}(\cdot\,;k)\|^2_{L^2(\Gamma)}dk$$

と分解し、オ一項、オ二項にそれぞれ trace の評価と(2.7)を用い Perseval の公式に注意すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}|k|\,\|\hat{w}(\cdot\,;k)\|^2_{L^2(\Gamma)}dk \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\|w(t,\cdot)\|^2_{H^1(\Omega_a)}+\|\partial_t w(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_a)}\right\}dt$$

が成り立つことがわかる。上の不等式の右辺の積分区間を $(0,\infty)$ と $(-\infty,0)$ とに分け、$(0,\infty)$ の方には $(2.2)_2$ を用い、$(-\infty,0)$ の方には Korn のオ一不等式と

$$\|v\|_{L^2(\Omega_a)} \leq {}^{\exists}C(\Gamma)\,a\,\|\nabla_x v\|_{L^2(\Omega)} \qquad ({}^{\forall}v\in C_0^{\infty}(\overline{\Omega}))$$

（柴田・嘗我[14]を参照）とに注意すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k| \, \|\hat{w}(\cdot\,;k)\|^2_{L^2(\Gamma)} \, dk \le {}^{\exists}C \cdot I$$

と評価でき、結局(2.8)を得る。以上により命題1.1が示せた。

参考文献

[1] J. D. Achenbach "Wave propagation in elastic solids" North-Holland

[2] G. Fichera Handbuch der Physik Bd. 6a/2, Springer pp. 347-389

[3] J. C. Guillot Math. Meth. Appl. Sci. 8 (1986), 289-310

[4] M. Ikawa Publ. RIMS, Kyoto Univ. 13 (1978), 71-110

[5] M. Ikehata and G. Nakamura Japan J. Appl. Math. 6 (1989), 83-95

[6] H. Iwashita and Y. Shibata Glasnik Math. 43 (1988), 291-313

[7] B. V. kapitonov Siberian Math. J. 28 (1987), 444-457

[8] H. kumano-go "Pseudo-differential operators" MIT Press

[9] P. D. Lax and R. S. Phillips "Scattering Theory" Academic Press

[10] C. S. Morawetz Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 561-568

[11] C. S. Morawetz Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), 439-444

[12] J. A. Nitsche RAIRO J. of Numerical Analysis 15 (1981), 237-248

[13] J. Ralston Duke Math. J. 46 (1979), 799-804

[14] Y. Shibata and H. Soga Publ. RIMS Kyoto Univ. 25 (1989), 861-887

[15] M. Taylor Proc. Conf. on PDE and Geometry, Marcel Dekker, 273-291

[16] B. R. Vainberg Russian Math. Surveys 30 (1975), 1-58